Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen

Von LÁSZLÓ LEINDLER in Szeged

Einleitung

Es sei $\{a_\nu\}$ $(\nu=0,1,\ldots)$ eine reelle Zahlenfolge und $\{\varphi_\nu(x)\}$ $(\nu=0,1,\ldots)$ ein im Intervall $(0,1)$ orthonormiertes Funktionensystem. Das n-te (C,α)-Mittel $(\alpha>-1)$ der orthogonalen Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x) \tag{1}$$

wird mit $\sigma_n^{(\alpha)}(x)$ bezeichnet, d. h. es ist

$$\sigma_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{A_n^{(\alpha)}}\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(\alpha)} a_\nu \varphi_\nu(x) \qquad (n=0,1,\ldots)$$

mit

$$A_m^{(\alpha)}=\binom{m+\alpha}{m}.$$

Die Orthogonalreihe (1) heißt im Intervall $(0,1)$ fast überall $|C,\alpha|$-summierbar, wenn im Intervall $(0,1)$ fast überall

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x)|<\infty$$

gilt.

K. TANDORI [4] hat den folgenden Satz bewiesen:

Damit die Reihe (1) *für jedes Orthonormalsystem* $\{\varphi_\nu(x)\}$ *im Intervall* $(0,1)$ *fast überall* $|C,1|$*-summierbar sei, ist die Bedingung*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{\nu=2^m+1}^{2^{m+1}} a_\nu^2\right\}^{1/2}<\infty \tag{2}$$

notwendig und hinreichend.

In § 1 dieser Arbeit wird bewiesen, daß die Bedingung (2) auch für $\alpha>\frac{1}{2}$ die notwendige und hinreichende Bedingung der $|C,\alpha|$-Summierbarkeit der Reihe (1) ist. Wir werden ferner hinreichende Bedingungen für $-1<\alpha<\frac{1}{2}$ und für $\alpha=\frac{1}{2}$ angeben, die im allgemeinen nicht geschwächt werden können und die für positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolgen $\{a_\nu\}$ auch notwendige Bedingungen der $|C,\alpha|$-Summierbarkeit bzw. $\left|C,\frac{1}{2}\right|$-Summierbarkeit sind.

In § 2 wird gezeigt, daß die in den Divergenzbehauptungen der Sätze des § 1 angeführten orthonormierten Funktionensysteme auch als orthonormierte Polynomsysteme gewählt werden können.

Ein im Intervall $(0,1)$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\chi_n(x)\}$ $(n=0,1,\ldots)$ heißt ein System vom Haarschen Typ — kurz: H-Typ —, wenn für jedes $x\in(0,1)$

$$\chi_n(x)\chi_m(x)=0 \quad (2^k<n,m\leqq 2^{k+1}, n\neq m;\ k=0,1,\ldots)$$

gilt. In § 3 werden wir folgendes beweisen: Ist die Reihe (1) für ein System vom H-Typ $|C,\alpha|$-summierbar mit $\alpha>0$, so ist sie auch fast überall absolut konvergent.

Endlich werden wir in § 4 beweisen, daß die Bedingung

$$\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m\left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}a_n^2\right\}^{1/2}<\infty \tag{3}$$

mit keiner positiven, monoton nichtabnehmenden, ins Unendliche strebenden Zahlenfolge $\{\lambda_m\}$ eine notwendige Bedingung der $|C,\alpha|$-Summierbarkeit mit $0\leqq\alpha\leqq\frac{1}{2}$ sein kann.

Ich möchte dem Herrn Dozent KÁROLY TANDORI, von dem diese Probleme stammen und der mich in der Fertigstellung dieser Arbeit mit wertvollen Ratschlägen unterstützt hat, meinen aufrichtigen Dank aussprechen.

§ 1. Die absolute Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen

In diesem Paragraphen werden wir drei Sätze beweisen.

Satz I. *Es sei* $\alpha>\frac{1}{2}$. *Damit die Reihe* (1) *für jedes orthonormierte Funktionensystem im Intervall* $(0,1)$ *fast überall* $|C,\alpha|$*-summierbar sei, ist die Bedingung* (2) *notwendig und hinreichend.*

Beweis von Satz I. Zum Beweis des Satzes benötigen wir die folgenden bekannten Tatsachen:

$$c_1(\alpha)\leqq\frac{A_m^{(\alpha)}}{m^\alpha}\leqq c_2(\alpha) \qquad (m>0, \alpha>-1), \tag{1.1}$$

wobei $c_1(\alpha)$ und $c_2(\alpha)$ nur von α abhängige positive Zahlen sind, ferner gelten die Relationen

$$A_m^{(\alpha)} > 0 \qquad (m \geqq 0,\ \alpha > -1),$$

$$A_{m+1}^{(\alpha)} > A_m^{(\alpha)} \qquad (m \geqq 0,\ \alpha > 0),$$

(siehe z. B. A. ZYGMUND [5], S. 77).

Mit einfacher Rechnung ergibt sich

$$L_{n,\nu}^{(\alpha)} = \frac{A_{n+1-\nu}^{(\alpha)}}{A_{n+1}^{(\alpha)}} - \frac{A_{n-\nu}^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha)}} = \frac{A_{n-\nu}^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha)}} \frac{\nu\alpha}{(n+1-\nu)(n+1+\alpha)}.$$

Aus (1.1) folgt die Abschätzung

$$\text{(1.2)} \qquad d_1(\alpha) \frac{(n+1-\nu)^{\alpha-1}\nu}{n^{\alpha+1}} \leqq |L_{n,\nu}^{(\alpha)}| \leqq d_2(\alpha) \frac{(n+1-\nu)^{\alpha-1}\nu}{n^{\alpha+1}}$$

$$(n = 1, 2, \ldots;\ \nu = 0, 1, \ldots, n;\ \alpha > -1,\ \alpha \neq 0),$$

wobei $d_1(\alpha)$ und $d_2(\alpha)$ nur von α abhängige positive Zahlen sind. Offensichtlich ist $L_{n,\nu}^{(\alpha)} > 0$ für $\alpha > 0$, $L_{n,\nu}^{(\alpha)} = 0$ für $\alpha = 0$ und $L_{n,\nu}^{(\alpha)} < 0$ für $-1 < \alpha < 0$.

Hinlänglichkeit. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $a_0 = a_1 = 0$ angenommen werden. Durch Anwendung der Cauchyschen Ungleichung erhält man für $\alpha > -1$ auf Grund von (1.1) und (1.2)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_0^1 |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \sigma_n^{(\alpha)}(x)|\, dx =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \int_0^1 |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \sigma_n^{(\alpha)}(x)|\, dx \leqq \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m/2} \left\{ \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \int_0^1 (\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \sigma_n^{(\alpha)}(x))^2 dx \right\}^{1/2} \leqq$$

$$\text{(1.3)} \qquad \leqq \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m/2} \left\{ \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \left[\sum_{\nu=0}^{n} (L_{n,\nu}^{(\alpha)})^2 a_\nu^2 + \frac{1}{(A_{n+1}^{(\alpha)})^2} a_{n+1}^2 \right] \right\}^{1/2} =$$

$$= O(1) \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m/2} \left\{ \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n+1-\nu)^{2\alpha-2}\nu^2}{n^{2\alpha+2}} a_\nu^2 \right\}^{1/2} +$$

$$+ O(1) \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m/2} \left[\left\{ \sum_{n=2^m+2}^{2^{m+1}} \frac{1}{n^{2\alpha}} a_n^2 \right\}^{1/2} + \frac{a_{2^{m+1}+1}}{(2^{m+1}+1)^\alpha} \right].$$

Ist $\alpha > \frac{1}{2}$, so kann man die Abschätzung (1.3) auf Grund von (2) fortsetzen:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \int_0^1 |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \sigma_n^{(\alpha)}(x)|\,dx =$$

$$= O(1) \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left\{ 2^{-m(1+2\alpha)} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \sum_{l=0}^{m} \sum_{\nu=2^l+1}^{\min(2^{l+1},n)} (n+1-\nu)^{2\alpha-2} \nu^2 a_\nu^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} a_n^2 \right\}^{1/2} \right] =$$

$$= O(1) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ 2^{-m(1+2\alpha)} \sum_{l=0}^{m} \sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}} \nu^2 a_\nu^2 \sum_{n=\max(2^m+1,\nu)}^{2^{m+1}} (n+1-\nu)^{2\alpha-2} \right\}^{1/2} + 1 \right] =$$

$$= O(1) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ 2^{-m(1+2\alpha)} \cdot 2^{m(2\alpha-1)} \sum_{l=0}^{m} \sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}} \nu^2 a_\nu^2 \right\}^{1/2} + 1 \right] =$$

$$= O(1) \left[\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \sum_{l=0}^{m} 2^l \left\{ \sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}} a_\nu^2 \right\}^{1/2} + 1 \right] =$$

$$= O(1) \left[\sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}} a_\nu^2 \right\}^{1/2} \cdot 2^l \sum_{m=l}^{\infty} 2^{-m} + 1 \right] < \infty.$$

Daraus folgt durch Anwendung des Satzes von B. Levi, daß die Reihe (1) im Intervall (0, 1) fast überall $|C, \alpha|$-summierbar ist.

Zum Beweis der Notwendigkeit von (2) benötigen wir den folgenden

Hilfssatz I. *Es sei* $\{R_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *ein im Intervall* (0, 1) *definiertes Treppenfunktionensystem.*[1]) *Wir bezeichnen mit* $J_s(n)$ $(n = 1, 2, \ldots;$ $s = 1, 2, \ldots, s_n)$ *die Konstanzintervalle von* $R_n(x)$. *Gilt für jedes* $m > n$ *die Beziehung*

(A) $$\int_{J_s(n)} \operatorname{sign} R_m(x)\,dx = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, s_n),$$

so gibt es zu jeder reellen Zahlenfolge $d_1, \ldots, d_N$ *eine einfache Menge*[2]) E_k *derart, daß für* $x \in E_k$

$$\left| \sum_{l=1}^{N} d_l R_l(x) \right| \geqq |d_{N-k} R_{N-k}(x)| \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1)$$

[1]) Eine Funktion in (0, 1) heißt Treppenfunktion, wenn (0, 1) in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden kann derart, daß die Funktion in jedem Teilintervall konstant ist.

[2]) D. h. E_k ist die Summe endlich vieler Intervalle.

besteht und

$$\mu(E_k \cap J_s(N-k-1)) = \frac{\mu(J_s(N-k-1))}{2^{k+1}} \text{ [3]}$$

$$(k=0, 1, \ldots, N-1;\ s=1, 2, \ldots, s_{N-k-1};\ J_1(0)=(0,1))$$

ist.

Beweis des Hilfssatzes I. Nach der Eigenschaft (A) von $R_{N-k}(x)$ gibt es offenbar für jedes $k(<N)$ eine einfache Menge E_k' derart, daß

$$\left|\sum_{l=1}^{N-k} d_l R_l(x)\right| \geqq |d_{N-k} R_{N-k}(x)| \qquad (x \in E_k')$$

besteht und

$$\mu(E_k' \cap J_s(N-k-1)) = \frac{\mu(J_s(N-k-1))}{2} \qquad (s=1, 2, \ldots, s_{N-k-1})$$

gilt. Weiterhin ist E_k' die Vereinigung gewisser $J_s(N-k)$. Ist $k=0$, dann ist die Behauptung bewiesen. Ist $k \geqq 1$, dann folgt nach der Eigenschaft (A) von $R_{N-k+1}(x)$, daß es eine einfache Menge $E_k''(\subseteqq E_k')$ derart gibt, daß für jedes $x \in E_k''$

$$\left|\sum_{l=1}^{N-k+1} d_l R_l(x)\right| \geqq \left|\sum_{l=1}^{N-k} d_l R_l(x)\right| \geqq |d_{N-k} R_{N-k}(x)|$$

besteht und

$$\mu(E_k'' \cap J_s(N-k-1)) = \frac{\mu(J_s(N-k-1))}{2^2} \qquad (s=1, 2, \ldots, s_{N-k-1})$$

gilt, wo E_k'' die Vereinigung gewisser $J_s(N-k+1)$ ist. Somit ergibt sich mit vollständiger Induktion die Behauptung.

Notwendigkeit. Im folgenden wird ein spezielles orthonormiertes System $\{\chi_n(x)\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ definiert. Es seien

$$\chi_n(x) = r_n(x) \text{ [4]} \qquad (n=0, 1, 2).$$

Die Funktionen $\chi_n(x)$ $(n=0, 1, 2)$ sind Treppenfunktionen.

Es sei $s(\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\chi_n(x)$ $(n=0, 1, \ldots, 2^s)$ schon so definiert sind, daß sie ein System vom H-Typ bilden.

Dann kann das Intervall $(0, 1)$ in endlich viele Teilintervalle $J_\varrho(1 \leqq \varrho \leqq \varrho_s)$ derart zerlegt werden, daß in jedem J_ϱ die Funktionen $\chi_n(x)$ $(n=0, 1, \ldots, 2^s)$ konstant sind.

[3]) Mit $\mu(H)$ wird das Lebesguesche Maß der Menge H bezeichnet.

[4]) $r_k(x)$ bezeichnet die k-te Rademachersche Funktion:

$$r_k(x) = \operatorname{sign} \sin 2^k \pi x \qquad (k=0, 1, \ldots).$$

Wir setzen

$$\varrho_0(m)=0 \quad \text{und} \quad \varrho_k(m)=\sum_{n=1}^{k}\frac{a_{2^m+n}^2}{A_m^2} \quad \left(A_m=\left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} a_n^2\right\}^{1/2};\right.$$

$$\left. k=1,\ldots,2^m;\ m=0,1,\ldots\right).$$

Für ein endliches Intervall $I=(u,v)$ wird

$$I_k(m,I)=(u+\mu(I)\varrho_{k-1}(m),\, u+\mu(I)\varrho_k(m)) \quad (k=1,2,\ldots,2^m;\ m=0,1,\ldots)$$

gesetzt.

Wir teilen jedes $J_\varrho=(u_\varrho, v_\varrho)$ in 2^s Teilintervalle ein,

$$I_k(s;J_\varrho)=(u_\varrho+\mu(J_\varrho)\varrho_{k-1}(s),\, u_\varrho+\mu(J_\varrho)\varrho_k(s)) \qquad (k=1,2,\ldots,2^s),$$

und setzen

$$\chi_{2^s+k}(x)=\frac{A_s}{a_{2^s+k}}\sum_{\varrho=1}^{\varrho_s} r_s(x;I_k(s,J_\varrho))\,^{5)} \qquad (k=1,2,\ldots,2^s).$$

Die Funktionen $\chi_n(x)$ $(2^s+1\leqq n\leqq 2^{s+1})$ sind Treppenfunktionen. Sie sind normiert:

$$\int_0^1 \chi_{2^s+k}^2(x)dx=\frac{A_s^2}{a_{2^s+k}^2}\sum_{\varrho=1}^{\varrho_s}\int_0^1 r_s^2(x,I_k(s;J_\varrho))dx=$$

$$=\frac{A_s^2}{a_{2^s+k}^2}\sum_{\varrho=1}^{\varrho_s}\mu(I_k(s;J_\varrho))\int_0^1 r_s^2(x)dx=\frac{A_s^2}{a_{2^s+k}^2}\sum_{\varrho=1}^{\varrho_s}\mu(J_\varrho)\frac{a_{2^s+k}^2}{A_s^2}=\sum_{\varrho=1}^{\varrho_s}\mu(J_\varrho)=1.$$

Nach der Definition ist es klar, daß das Funktionensystem $\{\chi_n(x)\}$ $(n=0,1,\ldots,2^{s+1})$ auch orthogonal und für jedes $x\in(0,1)$ sogar

$$\chi_n(x)\chi_m(x)=0 \qquad (2^l<n,m\leqq 2^{l+1};\ 0\leqq l\leqq s)$$

ist, also bilden die $\chi_n(x)$ ein System vom H-Typ.

---

[5]) Ist $I=(u;v)$ ein endliches Intervall und $h(x)$ eine in $(0,1)$ definierte Funktion, so wird

$$h(x;I)=\begin{cases} h\left(\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für } u<x<v \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt. Offensichtlich ist

$$\int_u^v h(x;I)dx=\mu(I)\int_0^1 h(x)dx.$$

Mit vollständiger Induktion ergibt sich sodam ein unendliches System vom H-Typ.

Das n-te (C, α)-Mittel der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$$

wird mit $\overline{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)$ bezeichnet. Wir nehmen an, daß die Reihe (1) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall $|C, \alpha|$-summierbar $\left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$ ist. Dann gilt auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\overline{\sigma}_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \overline{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)| < \infty$$

im Intervall (0, 1) fast überall.

Es sei $\varepsilon = 2^{-(18+2\alpha)} d_1^2(\alpha) d_2^{-2}(\alpha)$, wo $d_1(\alpha)$ und $d_2(\alpha)$ die unter (1.2) angeführten Konstanten sind. Nach dem Egoroffschen Satz gibt es dann eine meßbare Menge E mit $\mu(E) \geqq 1 - \varepsilon$ und eine positive Konstante K derart, daß für jedes $x \in E$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{\sigma}_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \overline{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)| < K$$

ist, woraus folgt:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_E |\overline{\sigma}_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \overline{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)| \, dx \leqq K \mu(E). \tag{1.4}$$

Es seien m und n natürliche Zahlen, $2^m < n \leqq 2^{m+1}$. Wir setzen

$$R_l(x; m, n) = \sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \qquad (l = 0, 1, \ldots, m-1),$$

$$R_m(x; m, n) = \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x)$$

und

$$R_{m+1}(x; m, n) = \frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}} a_{n+1} \chi_{n+1}(x).$$

Aus der Definition von $\chi_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ ist klar, daß die Funktionen $R_l(x; m, n)$ $(l = 0, 1, \ldots, m+1)$ die Bedingungen des Hilfssatzes I erfüllen.

Wir wenden auf die Funktionen $R_l(x; n, m)$ $(l = 0, 1, \ldots, m+1)$ den Hilfssatz I mit $N = m+1$, $k = 3$ an; die entsprechende Menge wird mit $E_3(m, n)$ bezeichnet. So ergibt sich auf Grund von (1.2) und der Definition der Funktionen $\chi_\nu(x)$ $(\nu=0,1,\ldots)$:

$$\sum_{n=2^3+1}^{\infty}\int_E|\bar\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\bar\sigma_n^{(\alpha)}(x)|\,dx=\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\int_E\Big|\sum_{\nu=0}^{n}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\chi_\nu(x)+$$

$$+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}}a_{n+1}\chi_{n+1}(x)\Big|\,dx\geqq\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\int_{E_3(m,n)\cap E}\Big|\sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\chi_\nu(x)\Big|\,dx\geqq$$

$$\geqq\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\Big(\int_{E_3(m,n)}-\int_{E_3(m,n)-E_3(m,n)\cap E}\Big)\Big|\sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\chi_\nu(x)\Big|\,dx\geqq$$

$$\geqq\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\Big(\int_{E_3(m,n)}\Big|\sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\chi_\nu(x)\Big|\,dx-$$

$$-\sqrt{\varepsilon}\cdot\Big\{\int_0^1\Big|\sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\chi_\nu(x)\Big|^2dx\Big\}^{1/2}\Big)\geqq$$

$$\geqq\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\Big(2^{-4}\sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}}a_\nu\frac{a_\nu}{A_{m-2}}L_{n,\nu}^{(\alpha)}-\sqrt{\varepsilon}\,d_2(\alpha)\,2^{-(\alpha+m)}A_{m-2}\Big)\geqq$$

$$\geqq\sum_{m=3}^{\infty}\Big(2^{-7}d_1(\alpha)\sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}}\frac{a_\nu^2}{A_{m-2}}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\frac{(n+1-\nu)^{\alpha-1}}{n^\alpha}-2^{-(9+2\alpha)}d_1(\alpha)A_{m-2}\Big)\geqq$$

$$\geqq\sum_{m=3}^{\infty}\Big(2^{-(8+2\alpha)}d_1(\alpha)A_{m-2}-2^{-(9+2\alpha)}d_1(\alpha)A_{m-2}\Big)\geqq2^{-(9+2\alpha)}d_1(\alpha)\sum_{m=1}^{\infty}A_m,$$

woraus (2) wegen (1.4) folgt.

Damit haben wir die Notwendigkeit der Bedingung (2) und den Satz I bewiesen, und auch die folgende Divergenzbehauptung erhalten:

Es sei $\alpha>\frac{1}{2}$. Ist die Bedingung (2) *nicht erfüllt, so gibt es ein in* $(0,1)$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $\{\varphi_n(x)\}$ *derart, daß die Reihe* (1) *nicht fast überall* $|C,\alpha|$*-summierbar ist.*

Wir werden jetzt die folgende Divergenzbehauptung beweisen:

Bezeichne $\{\varphi_n(x)\}$ *ein Orthonormalsystem von Treppenfunktionen. Ist die Orthogonalreihe* (1) *in einer Menge* $H(\subseteqq(0,1))$ *mit* $\mu(H)=2\delta$ $(0<2\delta<1)$ *nicht* $|C,\alpha|$*-summierbar für ein* $\alpha>-1$, *so kann ein orthonormiertes System* *von Treppenfunktionen* $\{\psi_n(x)\}$ *angegeben werden derart, daß die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x) \tag{1.5}$$

in $(0, 1)$ *fast überall nicht* $|C, \alpha|$*-summierbar ist.*

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $a_0 = a_1 = 0$ angenommen werden. Zum Beweis dieser Behauptung werden wir ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\psi_n(x)\}$, eine Indexfolge $\{N_m\}$ $(0 = N_0 < N_1 < \ldots < N_m < \ldots)$, eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge $\{\lambda_m\}$ und eine Folge von einfachen Mengen $\{H_m\}$ $(H_m \subseteq (0, 1))$ konstruieren, welche die folgenden Bedingungen erfüllen.

Die Mengen H_m sind stochastisch unabhängig[6]) und haben das Maß

$$\mu(H_m) = \delta \qquad (m = 1, 2, \ldots); \tag{1.6}$$

für jedes n gilt

$$\max_{0<x<1} |\psi_n(x)| \leqq \max_{0<x<1} |\varphi_n(x)|; \tag{1.7}$$

für $x \in H_{m+1}$ bestehen die Abschätzungen

$$\sum_{n=N_m}^{N_{m+1}-1} \left| \sum_{\nu=N_m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \psi_\nu(x) + \frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}} a_{n+1} \psi_{n+1}(x) \right| \geqq 4\lambda_{m+1} \tag{1.8}$$

und

$$\sum_{n=N_m}^{N_{m+1}-1} \left| \sum_{\nu=0}^{N_m} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \psi_\nu(x) \right| \leqq \lambda_{m+1}. \tag{1.9}$$

Wir setzen $\psi_0(x) = \varphi_0(x)$. Es sei $m_0 (\geqq 0)$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots, N_{m_0})$, die Zahlen $N_0 < N_1 < \ldots < N_{m_0}$, $(0<)\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_{m_0}$ und die einfachen Mengen $H_1, \ldots, H_{m_0}$ schon definiert sind derart, daß diese Funktionen in $(0, 1)$ orthonormiert sind, diese Mengen stochastisch unabhängig sind, (1.7) für $n \leqq N_{m_0}$ und (1.6), (1.8), (1.9) für $m = 0, 1, \ldots, m_0$ erfüllt sind.

Durch einfache Rechnung ergibt sich für $\alpha > -1$ und für ein beliebiges s

$$\sum_{n=s}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{s} |L_{n,\nu}^{(\alpha)}| < \infty.$$

Es sei

$$\lambda_{m_0+1} = \sum_{n=N_{m_0}}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{N_{m_0}} |L_{n,\nu}^{(\alpha)}| \cdot \max_{\substack{0 \leqq \mu \leqq N_{m_0} \\ 0<x<1}} |a_\mu \varphi_\mu(x)|.$$

[6]) D. h. für jede endlich Indexfolge $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ gilt
$\mu(H_{k_1} \cap H_{k_2} \cap \ldots \cap H_{k_n}) = \mu(H_{k_1}) \mu(H_{k_2}) \ldots \mu(H_{k_n})$.

Aus unseren Annahmen folgt, daß es einen Index N_{m_0+1} $(>N_{m_0})$ und eine einfache Menge $H'_{m_0+1}(\subseteqq(0,1))$ mit $\mu(H'_{m_0+1})=\delta$ gibt, derart, daß für $x\in H'_{m_0+1}$

$$\sum_{n=N_{m_0}}^{N_{m_0+1}-1}\left|\sum_{\nu=0}^{n}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\varphi_\nu(x)+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}}a_{n+1}\varphi_{n+1}(x)\right|\geqq 5\lambda_{m_0+1}$$

besteht. Daraus folgt nach der Definition von λ_{m_0+1}

$$\sum_{n=N_{m_0}}^{N_{m_0+1}-1}\left|\sum_{\nu=N_{m_0}+1}^{n}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\varphi_\nu(x)+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}}a_{n+1}\varphi_{n+1}(x)\right|\geqq$$

$$\text{(1.10)}\qquad \geqq\sum_{n=N_{m_0}}^{N_{m_0+1}-1}\left|\sum_{\nu=0}^{n}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\varphi_\nu(x)+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}}a_{n+1}\varphi_{n+1}(x)\right|-$$

$$-\sum_{n=N_{m_0}}^{N_{m_0+1}-1}\left|\sum_{\nu=0}^{N_{m_0}}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\varphi_\nu(x)\right|\geqq 4\lambda_{m_0+1}$$

für $x\in H'_{m_0+1}$.

Dann kann das Intervall $(0,1)$ in endlich viele Teilintervalle I_l $(1\leqq l\leqq l_{m_0})$ derart zerlegt werden, daß in jedem I_l die Funktionen $\psi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq N_{m_0})$ konstant sind und jede Menge H_m $(m=1,2,\dots,m_0)$ die Vereinigung einiger I_l ist. Die zwei Hälften des Intervalls I_l bezeichnen wir mit I'_l bzw. I''_l. Es sei

$$\psi_n(x)=\sum_{l=1}^{l_{m_0}}(\varphi_n(x;I'_l)-\varphi_n(x;I''_l))\qquad (N_{m_0}<n\leqq N_{m_0+1})$$

und

$$H_{m_0+1}=\bigcup_{l=1}^{l_{m_0}}(H'_{m_0+1}(I'_l)\cup H'_{m_0+1}(I''_l)).^{7})$$

Offensichtlich sind diese Funktionen Treppenfunktionen, die Menge H_{m_0+1} ist einfach, die Funktionen $\psi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq N_{m_0+1})$ bilden in $(0,1)$ ein orthonormiertes System, (1.7) besteht für $n\leqq N_{m_0+1}$ und (1.6) für $m=m_0+1$, die Mengen $H_0,\dots,H_{m_0+1}$ sind stochastisch unabhängig, ferner folgt auf Grund der Definition von H_{m_0+1}, λ_{m_0+1}, N_{m_0+1} und (1.10), daß (1.8) und (1.9) auch für $m=m_0+1$ bestehen.

Mit vollständiger Induktion erhalten wir das System $\{\psi_n(x)\}$ und die Folgen $\{H_m\}$, $\{N_m\}$, $\{\lambda_m\}$ mit erwähnten Eigenschaften.

Aus (1.8) und (1.9) folgt, daß für $x\in H_m$

$$\sum_{n=N_{m-1}}^{N_m-1}\left|\sum_{\nu=0}^{n}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\psi_\nu(x)+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}}a_{n+1}\psi_{n+1}(x)\right|\geqq 3\lambda_m$$

---

[7]) Mit $H(I)$ wird die Bildmenge von H bei der das Intervall $(0,1)$ in I abbildenden linearen Transformation bezeichnet.

besteht. Ist $x \in \overline{\lim_{m\to\infty}} H_{m}$, so gilt diese Abschätzung für unendlich viele m, also ist die Reihe (1.5) in diesem Punkt nicht $|C, \alpha|$-summierbar. Aus der stochastischen Unabhängigkeit der Mengen H_m und aus (1.6) folgt durch Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas (siehe z. B. W. FELLER [1], S. 155), daß $\mu(\overline{\lim_{m\to\infty}} H_m) = 1$ ist. Also ist die Reihe (1.5) fast überall nicht $|C, \alpha|$-summierbar. — Hiermit haben wir unsere letzte Behauptung bewiesen.

Satz II. *Damit die Reihe* (1) *für jedes orthonormierte Funktionensystem im Intervall* (0, 1) *fast überall* $|C, \alpha|$-*summierbar sei, ist im Falle* $\alpha = \frac{1}{2}$ *die Bedingung*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m}\, A_m < \infty \qquad \left(A_m = \left\{ \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} a_n^2 \right\}^{1/2}\right) \tag{1.11}$$

und im Falle $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$ *die Bedingung*

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)} A_m < \infty \tag{1.12}$$

hinreichend; für monotone Koeffizientenfolgen sind diese Bedingungen aber auch notwendig, falls diese Summierbarkeit für alle Orthonormalsysteme $\{\varphi_n(x)\}$ *gefordert ist.*

Beweis des Satzes II. Wir nehmen auch jetzt $a_0 = a_1 = 0$ an und beweisen zunächst, daß die Bedingungen (1.11) bzw. (1.12) für die $\left|C, \frac{1}{2}\right|$- bzw. $|C, \alpha|$-Summierbarkeit fast überall mit $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$ hinreichend sind. Durch Anwendung der Abschätzung (1.3) erhält man auf Grund von (1.11) und (1.12), daß für $\alpha = \frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 |\sigma_{n+1}^{(\frac{1}{2})}(x) - \sigma_n^{(\frac{1}{2})}(x)|\, dx =$$

$$= O(1)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ 2^{-2m} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \sum_{l=0}^{m} \sum_{\nu=2^l+1}^{\min(2^{l+1}, n)} (n+1-\nu)^{-1} \nu^2 a_\nu^2 \right\}^{1/2} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \right) =$$

$$= O(1)\left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\left\{ 2^{-2m} \sum_{l=0}^{m-2} \sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}} \nu^2 a_\nu^2 \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} (n+1-\nu)^{-1} \right\}^{1/2} + \right.\right.$$

$$+\left\{2^{-2m}\sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m}\nu^2a_\nu^2\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}(n+1-\nu)^{-1}\right\}^{1/2}+$$

$$+\left\{2^{-2m}\sum_{\nu=2^m+1}^{2^{m+1}}\nu^2a_\nu^2\sum_{n=\nu}^{2^{m+1}}(n+1-\nu)^{-1}\right\}^{1/2}\Bigg)+1\Bigg]=$$

$$=O(1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m}\sum_{l=0}^{m-2}2^lA_l+\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{m}A_{m-1}+\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{m}A_m+1\right)=$$

$$=O(1)\left(\sum_{l=0}^{\infty}A_l2^l\sum_{m=l}^{\infty}2^{-m}+1\right)<\infty$$

besteht, während für $-1<\alpha<\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1|\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x)|\,dx=$$

$$=O(1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left\{2^{-m(1+2\alpha)}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\sum_{l=0}^{m}\sum_{\nu=2^l+1}^{\min(2^{l+1},n)}(n+1-\nu)^{2\alpha-2}\nu^2a_\nu^2\right\}^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=0}^{\infty}2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)}A_m\right)=$$

$$=O(1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left\{2^{-m(1+2\alpha)}\sum_{l=0}^{m}\sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}}\nu^2a_\nu^2\sum_{n=\max\{2^m+1,\,\nu\}}^{2^{m+1}}(n+1-\nu)^{2\alpha-2}\right\}^{1/2}+1\right)=$$

$$=O(1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left\{2^{-m(1+2\alpha)}\Bigg[2^{2m}A_m^2+2^{2m}A_{m-1}^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{l=0}^{m-2}2^{2l}A_l^2\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}(n+1-2^{l+1})^{2\alpha-2}\Bigg]\right\}^{1/2}+1\right)=$$

$$=O(1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)}A_m+\sum_{m=0}^{\infty}\left\{2^{-m(1+2\alpha)}\sum_{l=0}^{m-2}2^{2l}A_l^22^{m(2\alpha-1)}\right\}^{1/2}+1\right)=$$

$$=O(1)\left(\sum_{l=0}^{\infty}A_l2^l\sum_{m=l}^{\infty}2^{-m}+1\right)<\infty$$

gilt. Daraus ergibt sich durch Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe (1) fast überall $\left|C,\frac{1}{2}\right|$- bzw. $|C,\alpha|$-summierbar mit $-1<\alpha<\frac{1}{2}$ ist.

Zum Beweis des Satzes II haben wir noch zu zeigen, daß (1. 11) bzw. (1. 12) für jede monotone Koeffizientenfolge notwendige Bedingungen der

$\left|C, \frac{1}{2}\right|$- bzw. $|C, \alpha|$-Summierbarkeit fast überall mit $-1<\alpha<\frac{1}{2}$ sind, falls diese Summierbarkeit für alle Orthonormalsysteme $\{\varphi_n(x)\}$ gefordert wird.

Es sei $\{a_n\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge, wobei $a_0=a_1=0$ angenommen werden kann. Das n-te (C, α)-Mittel der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(x) \tag{1.13}$$

bezeichnen wir mit $\sigma_n^{*(\alpha)}(x)$.

Wir benötigen den

Hilfssatz II. *Ist $\Sigma \varrho_\nu^2<\infty$, dann ist*

$$A\{\Sigma \varrho_\nu^2\}^{1/2} \leqq \int_0^1 |\mathfrak{h}(x)|\, dx \leqq B\{\Sigma \varrho_\nu^2\}^{1/2}$$

erfüllt, wobei A und B positive, von der Folge $\{\varrho_\nu\}$ unabhängige Konstanten sind und $\mathfrak{h}(x)$ die Summenfunktion der Reihe

$$\Sigma \varrho_\nu r_\nu(x)$$

bezeichnet.

Dieser Satz ist bekannt. (Siehe z. B. A. Zygmund [5], S. 213.)

Ist die Reihe (1) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ in $(0, 1)$ fast überall $\left|C, \frac{1}{2}\right|$-summierbar, dann ist es auch die Reihe (1.13). Es sei $\varepsilon=4^{-1}A^2$. Nach dem Satz von Egoroff gibt es eine Konstante M und eine meßbare Menge $G(\subset(0, 1))$ mit $\mu(G)>1-\varepsilon$, so daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_{n+1}^{*(\frac{1}{2})}(x)-\sigma_n^{*(\frac{1}{2})}(x)|<M \qquad (x \in G) \tag{1.14}$$

besteht. Die Menge $(0, 1)-G$ wird mit CG bezeichnet. Durch Anwendung des Hilfssatzes II ergibt sich auf Grund von (1.2) und (1.14)

$$M\mu(G) \geqq \sum_{n=0}^{\infty} \int_G |\sigma_{n+1}^{*(\frac{1}{2})}(x)-\sigma_n^{*(\frac{1}{2})}(x)|\, dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1-\int_{CG}\right)|\sigma_{n+1}^{*(\frac{1}{2})}(x)-\sigma_n^{*(\frac{1}{2})}(x)|\, dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1|\sigma_{n+1}^{*(\frac{1}{2})}(x)-\sigma_n^{*(\frac{1}{2})}(x)|\, dx-\sqrt{\mu(CG)}\left\{\int_0^1(\sigma_{n+1}^{*(\frac{1}{2})}(x)-\sigma_n^{*(\frac{1}{2})}(x))^2 dx\right\}^{1/2}\right) \geqq$$

$$\geqq \sum_{n=0}^{\infty}(A-\sqrt{\varepsilon})\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\left(L_{n,\nu}^{(\frac{1}{2})}\right)^2 a_\nu^2+\frac{a_{n+1}^2}{\left(A_{n+1}^{(\frac{1}{2})}\right)^2}\right\}^{1/2}\geqq$$

$$\geqq \frac{A}{2}d_1(\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(n+1-\nu)^{-1}\nu^2a_\nu^2}{n^3}\right\}^{1/2}\geqq$$

$$\geqq \frac{A}{2}d_1(\alpha)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\left\{\sum_{\nu=2^m+1}^{n}\frac{(n+1-\nu)^{-1}\nu^2a_\nu^2}{n^3}\right\}^{1/2}\geqq$$

$$\geqq \frac{A}{2^2}d_1(\alpha)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_{2^{m+1}}}{2^{\frac{m+1}{2}}}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\left\{\sum_{\nu=2^m+1}^{n}(n+1-\nu)^{-1}\right\}^{1/2}\geqq$$

$$\geqq \frac{A}{2^5}d_1(\alpha)\sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{m+1}{2}}\sqrt{m+1}\,a_{2^{m+1}}\geqq$$

$$\geqq \frac{A}{2^5}d_1(\alpha)\sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{m}\,A_m.$$

Also (1. 11) ist erfüllt.

Damit haben wir die Notwendigkeit der Bedingung (1. 11) für monotone Koeffizientenfolgen gezeigt.

Nehmen wir an, daß die Reihe (1. 13) in (0, 1) fast überall $|C,\alpha|$-summierbar ist für ein beliebiges α zwischen -1 und $\frac{1}{2}$. Es sei $\varepsilon=4^{-1}A^2$. Nach dem Egoroffschen Satz gibt es eine meßbare Menge G_1, mit $\mu(CG_1)\leqq\varepsilon$ und eine Konstante M_1 derart, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\sigma_{n+1}^{*(\alpha)}(x)-\sigma_n^{*(\alpha)}(x)|<M_1 \qquad (x\in G_1). \tag{1. 15}$$

Durch Anwendung des Hilfssatzes II folgt auf Grund von (1. 1) und (1. 15)

$$M_1\geqq\sum_{n=0}^{\infty}\int_{G_1}|\sigma_{n+1}^{*(\alpha)}(x)-\sigma_n^{*(\alpha)}(x)|\,dx\geqq\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1-\int_{CG_1}\right)|\sigma_{n+1}^{*(\alpha)}(x)-\sigma_n^{*(\alpha)}(x)|\,dx\geqq$$

$$\geqq\sum_{n=0}^{\infty}(A-\sqrt{\varepsilon})\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(L_{n,\nu}^{(\alpha)})^2a_\nu^2+\frac{a_{n+1}^2}{(A_{n+1}^{(\alpha)})^2}\right\}^{1/2}\geqq\frac{A}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{A_n^{(\alpha)}}\geqq$$

$$\geqq\frac{A}{2c_2(\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}=\frac{A}{2c_2(\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\frac{a_n}{n^\alpha}\geqq\frac{A}{2c_2(\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}2^{-(m+1)\alpha}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}a_n\geqq$$

$$\geqq\frac{A}{4c_2(\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}2^{-(m+1)\alpha}2^{\frac{m+1}{2}}A_{m+1}=\frac{A}{4c_2(\alpha)}\sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)}A_m,$$

also ist (1. 12) erfüllt.

Wir haben hiermit die folgende Divergenzbehauptung bewiesen:

Es sei $\{a_n\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge. Sind

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m}\, A_m = \infty \quad bzw. \quad \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}(1-2\alpha)} A_m = \infty \quad \left(\text{für ein } \alpha,\ -1 < \alpha < \frac{1}{2}\right),$$

so gibt es orthonormierte Systeme von Treppenfunktionen $\{\Phi_n(x)\}$ bzw. $\{\psi_n(x)\}$ derart, daß die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x)$ in $(0, 1)$ nicht fast überall $\left|C, \frac{1}{2}\right|$- bzw. $|C, \alpha|$-summierbar sind.

Mit der obigen Methode kann gezeigt werden, daß diese Systeme von Treppenfunktionen $\{\Phi_n, (x)\}$ bzw. $\{\psi_n(x)\}$ auch so gewählt werden können, daß die entsprechenden Reihen in $(0, 1)$ *fast überall nicht* $\left|C, \frac{1}{2}\right|$- *bzw.* $|C, \alpha|$-*summierbar sind.* — Damit haben wir den Satz II vollständig bewiesen.

Wir werden noch den folgenden Divergenzsatz beweisen:

Satz III. *Es seien $\{p_m\}$ bzw. $\{q_m\}$ positive Zahlenfolgen mit*

$$p_m = o(\sqrt{m}) \quad bzw. \quad q_m = o\left(2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)}\right) \quad \text{für} \quad -1 < \alpha < \frac{1}{2}. \tag{1.16}$$

Dann gibt es orthonormierte Systeme von Treppenfunktionen $\{\Phi_n(x)\}$ bzw. $\{\psi_n(x)\}$ und Koeffizientenfolgen $\{b_n\}$ bzw. $\{c_n\}$ derart, daß die Beziehungen

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m B_m < \infty \quad bzw. \quad \sum_{m=0}^{\infty} q_m C_m < \infty \tag{1.17}$$

gelten, wo

$$B_m = \left\{ \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} b_n^2 \right\}^{1/2} \quad bzw. \quad C_m = \left\{ \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} c_n^2 \right\}^{1/2}$$

bedeuten, die Orthogonalreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \Phi_n(x) \quad bzw. \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) \tag{1.18}$$

aber im Intervall $(0, 1)$ fast überall nicht $\left|C, \frac{1}{2}\right|$- bzw. $|C, \alpha|$-summierbar sind.

Beweis von Satz III. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß

$$\frac{p_m}{\sqrt{m}} \leqq 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{q_m}{2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)}} \leqq 1$$

für jedes $m \geqq 1$ gilt. Es sei $\{u_n\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge mit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu = \infty.$$

Dann kann nach (1.16) eine Indexfolge $\{N_k\}$ $(N_0 = 1)$ bestimmt werden, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(1.19) \qquad p_m m^{-\frac{1}{2}} \leqq k^{-2} \quad \text{bzw.} \quad q_m 2^{-\frac{m}{2}(1-2\alpha)} \leqq k^{-2} \quad \text{für} \quad m \geqq N_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

und

$$(1.20) \qquad \sum_{\nu=N_{k-1}}^{N_k - 1} u_\nu \leqq \sum_{\nu=N_k}^{N_{k+1}-1} u_\nu \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Es sei

$$(1.21) \qquad u(n) = \sum_{\nu=N_{k-1}}^{N_k - 1} u_\nu \quad \text{für} \quad N_{k-1} \leqq n < N_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Die so definierte Zahlenfolge $\{u(n)\}$ ist positiv und nach (1.20) monoton nichtabnehmend. Nach (1.19) und (1.21) sind

$$(1.22) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m u_m}{\sqrt{m}\, u(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=N_{k-1}}^{N_k - 1} \frac{p_m u_m}{\sqrt{m}\, u(m)} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

bzw.

$$(1.23) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m u_m}{2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)} u(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=N_{k-1}}^{N_k - 1} \frac{q_m u_m}{2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)} u(m)} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Nach (1.21) ist

$$(1.24) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_m}{u(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=N_{k-1}}^{N_k - 1} \frac{u_m}{u(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Es seien nun

$$b_n = \left(2^{\frac{m}{2}} \sqrt{m}\, u(m) u_m^{-1}\right)^{-1} \quad \text{bzw.} \quad c_n = \left(2^{\frac{m}{2}} \cdot 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)} u(m) u_m^{-1}\right)^{-1}$$
$$\text{für} \quad 2^m < n \leqq 2^{m+1}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

So sind

$$B_m = \frac{u_m}{\sqrt{m}\, u(m)} \quad \text{bzw.} \quad C_m = \frac{u_m}{2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)} u(m)} \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Daraus ergibt sich auf Grund von (1.22), (1.23) und (1.24), daß (1.17) erfüllt ist, wogegen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m}\, B_m = \infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{m=0}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)} C_m = \infty$$

ist. Auf Grund unserer nach dem Beweis des Satzes II erwähnten Behauptung gibt es daher orthonormierte Funktionensysteme $\{\Phi_n(x)\}$ bzw. $\{\psi_n(x)\}$, für welche die Orthogonalreihen (1. 18) im Intervall $(0, 1)$ fast überall nicht $\left|C, \frac{1}{2}\right|$- bzw. $|C, \alpha|$-summierbar $\left(-1 < \alpha < \frac{1}{2}\right)$ sind.

Damit haben wir den Satz III bewiesen.

§ 2. Divergenzbehauptungen für Reihen, welche nach orthonormierten Polynomsystemen fortschreiten

In diesem Paragraphen werden wir den folgenden Satz beweisen:

Satz IV. *Man kann die in den Divergenzbehauptungen des § 1 angeführten orthonormierten Funktionensysteme auch als orthonormierte Polynomsysteme wählen.*

Beweis des Satzes IV. Zum Beweis des Satzes benötigen wir den folgenden Approximationssatz. (Siehe L. Leindler [3], 20—37.)

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *ein im Grundintervall* $(0, 1)$ *orthonormiertes Funktionensystem. Dann kann zu jeder positiven Zahlenfolge* $\{\varepsilon_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *und zu jeder Indexfolge* $\{N_i\}$ $(0 = N_0 < N_1 < \ldots < N_i < \ldots)$ *ein in* $(0, 1)$ *orthonormiertes Polynomsystem* $\{P_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *und eine Folge von meßbaren Mengen* $G_i (\subseteq (0, 1))$ $(i = 0, 1, \ldots)$ *angegeben werden, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Für* $x \in CG_i$ *und für jedes* n *mit* $N_i < n \leqq N_{i+1}$ *gilt*

$$|\varphi_n(x) - (-1)^{j_i(x)} P_n(x)| \leqq \varepsilon_i \qquad (j_i(x) = 0 \textit{ oder } 1)$$

und

$$\mu(G_i) \leqq \varepsilon_i .$$

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ ein im Intervall $(0, 1)$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen (die in den Divergenzbehauptungen des § 1 vorkommenden orthonormierten Funktionensysteme bestehen immer aus Treppenfunktionen) und $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $(a_0 = a_1 = 0)$ eine nichtnegative Zahlenfolge. Wir nehmen an, daß für dieses System

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \sigma_n^{(\alpha)}(x)| = \infty \qquad (\text{für ein } \alpha, \alpha > -1)$$

fast überall gilt. Dann können, wie es in § 1 bewiesen wurde, eine Indexfolge $\{N_i\}$ $(0=N_0<N_1<\ldots<N_i<\ldots)$, eine stochastisch unabhängige, meßbare Mengenfolge $\{H_i\}$ $(\subseteqq(0,1))$ $(i=0,1,\ldots)$ mit $\mu(H_i)=\delta>0$ und eine positive, zunehmende Zahlenfolge $\{\lambda_i\}$ $(i=0,1,\ldots)$ $(\lambda_1\geqq 2)$ angegeben werden derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Für jedes $x\in H_i$ $(i=0,1,\ldots)$ ist

$$\sum_{n=N_i}^{N_{i+1}-1}\left|\sum_{\nu=N_i+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\varphi_\nu(x)+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}}a_{n+1}\varphi_{n+1}(x)\right|\geqq 4\lambda_i \tag{2.1}$$

und

$$\sum_{n=N_i}^{N_{i+1}-1}\left|\sum_{\nu=0}^{N_i} L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\varphi_\nu(x)\right|\leqq\lambda_i. \tag{2.2}$$

Nach unserer Annahme ergibt sich auf Grund des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas

$$\mu(\overline{\lim_{i\to\infty}}\, H_i)=1. \tag{2.3}$$

Wir wählen die Zahlenfolge $\{\varepsilon_i\}$ $(i=0,1,\ldots)$ so, daß

$$\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon_i<\infty \tag{2.4}$$

und

$$\varepsilon_i\cdot\sum_{n=N_i}^{N_{i+1}-1}\left(\sum_{\nu=0}^{n}|L_{n,\nu}^{(\alpha)}|\,a_\nu+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}}a_{n+1}\right)<\lambda_i. \tag{2.5}$$

Wir wenden auf das Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ mit der obigen Indexfolge $\{N_i\}$ und der Zahlenfolge $\{\varepsilon_i\}$ den erwähnten Approximationssatz an. Dann ergibt sich aus (2.1), (2.2) und (2.5) durch einfache Rechnung, daß es ein in (0, 1) orthonormiertes Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ und eine Folge von meßbaren Mengen $G_i(\subseteqq(0,1))$ $(i=0,1,\ldots)$ gibt, derart, daß für jedes $x\in H_i-G_i$ $(i=1,2,\ldots)$

$$\sum_{n=N_i}^{N_{i+1}-1}\left|\sum_{\nu=N_i+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu P_\nu(x)+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}}a_{n+1}P_{n+1}(x)\right|\geqq 3\lambda_i$$

und

$$\sum_{n=N_i}^{N_{i+1}-1}\left|\sum_{\nu=0}^{N_i} L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu P_\nu(x)\right|\leqq 2\lambda_i$$

ist. Daraus folgt, daß für jedes $x\in H_i-G_i$ $(i=0,1,\ldots)$

$$\sum_{n=N_i}^{N_{i+1}-1}|\tilde\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\tilde\sigma_n^{(\alpha)}(x)|\geqq\lambda_i \tag{2.6}$$

besteht, wobei $\tilde{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)$ das (C, α)-Mittel der Orthogonalreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x) \tag{2.7}$$

bezeichnet.

Offensichtlich ist

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, G_i \subseteq \bigcup_{i=i_0}^{\infty} G_i$$

für jedes i_0. Somit ist

$$\mu(\overline{\lim_{i\to\infty}}\, G_i) \leqq \sum_{i=i_0}^{\infty} \mu(G_i) \leqq \sum_{i=i_0}^{\infty} \varepsilon_i$$

für jedes i_0, woraus nach (2.4) $\mu(\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\, G_i) = 0$ folgt.

Daraus und aus (2.3) ergibt sich $\mu(\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\,(H_i - G_i)) = 1$, woraus nach (2.6) folgt, daß die Reihe (2.7) fast überall nicht $|C, \alpha|$-summierbar ist.

Damit haben wir den Satz IV bewiesen.

§ 3. Über die Systeme vom Haarschen Typ

In diesem Paragraphen wird folgendes gezeigt: Ist die Reihe (1) für ein System vom H-Typ fast überall $|C, \alpha|$-summierbar mit einem $\alpha > 0$, so ist sie auch fast überall absolut konvergent. Wir können sogar mehr zeigen; es gilt nämlich der folgende

Satz V. *Damit die Reihe* (1) *für jedes System* $\{\varphi_n(x)\}$ *vom H-Typ im Intervall* (0, 1) *fast überall* $|C, \alpha|$*-summierbar sei, sind die Bedingungen*

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m\alpha} A_m < \infty \tag{3.1}$$

bzw.

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m < \infty \tag{3.2}$$

für $-1 < \alpha < 0$ *bzw. für* $\alpha \geqq 0$ *notwendig und hinreichend.*

Zum Beweis des Satzes benötigen wir den folgenden

Hilfssatz III. *Ist die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n$ $|C, \alpha|$*-summierbar* $(\alpha > -1)$, *so ist sie für jedes* $\beta > 0$ *auch* $|C, \alpha + \beta|$*-summierbar.*

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe E. KOGBETLIANTZ [2], 237—239.)

Beweis des Satzes V. Zuerst werden wir die Hinlänglichkeit der Bedingungen (3.1) und (3.2) beweisen. Es sei $-1<\alpha\leqq 0$. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1|\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x)|\,dx\leqq$$

$$\leqq\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\sum_{l=0}^{m}\int_0^1\left|\sum_{\nu=2^l+1}^{\min(2^{l+1},n)}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\varphi_\nu(x)\right|dx+\right. \tag{3.3}$$

$$\left.+\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\frac{1}{A_n^{(\alpha)}}|a_n|\int_0^1|\varphi_n(x)|\,dx\right).$$

Das zweite Glied ist kleiner als

$$O(1)\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m\alpha}A_m\left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\left(\int_0^1|\varphi_n(x)|\,dx\right)^2\right\}^{1/2}=$$

$$=O(1)\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m\alpha}A_m\left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}I_n\right\}^{1/2}=O(1)\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m\alpha}A_m<\infty,$$

wobei I_n $(2^m<n\leqq 2^{m+1})$ die Teilmenge von $(0,1)$ bezeichnet, auf welcher $\varphi_n(x)\neq 0$ ist. Ist $\alpha=0$, dann tritt nur dieses Glied auf. Damit ist die Hinlänglichkeit der Bedingung (3.2) für $\alpha=0$ bewiesen. Durch Anwendung des Hilfssatzes III folgt hieraus die Hinlänglichkeit der Bedingung (3.2) auch für $\alpha>0$.

Das erste Glied von (3.3) ist kleiner als

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\sum_{l=0}^{m}\sum_{\nu=2^l+1}^{\min(2^{l+1},n)}|L_{n,\nu}^{(\alpha)}|\,|a_\nu|\int_0^1|\varphi_\nu(x)|\,dx=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m}\sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}}|a_\nu|\int_0^1|\varphi_\nu(x)|\,dx\sum_{n=\max\{2^m+1,\nu\}}^{2^{m+1}}|L_{n,\nu}^{(\alpha)}|\leqq \tag{3.4}$$

$$\leqq O(1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m}A_l\left\{\sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}}\left(\int_0^1|\varphi_\nu(x)|\,dx\right)^2\right\}^{1/2}\sum_{n=\max\{2^m+1,\nu\}}^{2^{m+1}}|L_{n,\nu}^{(\alpha)}|.$$

Für $2^l < \nu \leqq 2^{l+1}$ $(l=0, 1, \ldots, m-2)$ gibt nach (1.2) $(-1<\alpha<0)$

$$\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} |L_{n,\nu}^{(\alpha)}| = O(1) \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{(n+1-\nu)^{\alpha-1}\nu}{(n+1)^{\alpha+1}} = \tag{3.5}$$
$$= O(1) 2^l \cdot 2^{-m(\alpha+1)} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} (n+1-\nu)^{\alpha-1} = O(1) 2^{l-m},$$

für $2^{m-1} < \nu \leqq n$ ist

$$\sum_{n=\max\{2^m+1,\,\nu\}}^{2^{m+1}} |L_{n,\nu}^{(\alpha)}| = O(1) 2^{-m\alpha} \sum_{n=\max\{2^m+1,\,\nu\}}^{2^{m+1}} (n+1-\nu)^{\alpha-1} = O(1) 2^{-\alpha m}. \tag{3.6}$$

Aus (3.4), (3.5) und (3.6) ergibt sich, daß das erste Glied von (3.3) kleiner ist als

$$O(1)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{m-2} 2^{l-m} A_l \left\{ \sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}} I_\nu \right\}^{1/2} + \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-\alpha m} A_m \left\{ \sum_{\nu=2^m+1}^{2^{m+1}} I_\nu \right\}^{1/2} \right) =$$
$$= O(1) \left(\sum_{l=0}^{\infty} A_l 2^l \sum_{m=l}^{\infty} 2^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-\alpha m} A_m \right) < \infty.$$

Durch Addition dieser Abschätzungen ergibt sich die Hinlänglichkeit der Bedingung (3.1).

N o t w e n d i g k e i t. Es seien $\chi_n(x)$ $(n=0, 1, \ldots)$ die im Beweis des Satzes I definierten Funktionen. Das Funktionensystem $\{\chi_n(x)\}$ ist ein System vom H-Typ. Bei Benützung der Bezeichnungen des § 1 nehmen wir an, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\bar{\sigma}_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \bar{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)| < \infty$$

für ein α $(-1<\alpha<0)$ im Intervall $(0, 1)$ fast überall gilt. Es sei $\varepsilon = 2^{-10} d_2^{-2}(\alpha) d_1^2(\alpha)$. Nach dem Egoroffschen Satz gibt es eine meßbare Menge $E(\subseteq(0,1))$ mit $\mu(E) \geqq 1-\varepsilon$ und eine Konstante M derart, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\bar{\sigma}_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \bar{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)| < M \qquad (x \in E)$$

ist, woraus folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_E |\bar{\sigma}_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \bar{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)| \, dx \leqq M \mu(E). \tag{3.7}$$

Es sei m beliebige natürliche Zahl und $2^m < n \leqq 2^{m+1}$. Es wird

$$R_l(x) = \sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \qquad (l=0, \ldots, m-1),$$

$$R_m(x) = \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x)$$

und

$$R_{m+1}(x) = \frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}} a_{n+1} \chi_{n+1}(x)$$

gesetzt. Wir wenden den Hilfssatz I für die $R_l(x)$ mit $N = m+1$ und $k=1$ an; die entsprechende Menge wird mit $E_1(n, m)$ bezeichnet. So ergibt sich auf Grund von (1.2):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_E |\overline{\sigma}_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \overline{\sigma}_n^{(\alpha)}(x)| \, dx =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \int_E \left| \sum_{\nu=0}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) + \frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}} a_{n+1} \chi_{n+1}(x) \right| dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \int_{E_1(n,m) \cap E} \left| \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \right| dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \left(\int_{E_1(n,m)} - \int_{E_1(n,m) - E_1(n,m) \cap E} \right) \left| \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \right| dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \left(\int_{E_1(n,m)} \left| \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \right| dx - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\varepsilon} \left\{ \int_0^1 \left| \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \right|^2 dx \right\}^{1/2} \right) \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \left(2^{-2} \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \frac{a_\nu}{A_m} - \sqrt{\varepsilon}\, d_2(\alpha) 2^{|\alpha| m} A_m \right) \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=0}^{\infty} \left(2^{-3} d_1(\alpha) \sum_{\nu=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{a_\nu^2}{A_m} \sum_{n=\nu}^{2^{m+1}} \frac{(n+1-\nu)^{\alpha-1}}{n^\alpha} - 2^{-5} d_1(\alpha) 2^{|\alpha| m} A_m \right) \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=0}^{\infty} (2^{-4} d_1(\alpha) 2^{|\alpha| m} A_m - 2^{-5} d_1(\alpha) 2^{|\alpha| m} A_m) \geqq \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-5} d_1(\alpha) 2^{-\alpha m} A_m .$$

Nach (3.7) ergibt sich daraus die Notwendigkeit der Bedingung von (3.1).

Die Notwendigkeit der Bedingung (3.2) folgt für $\alpha > \frac{1}{2}$ aus dem Satz I, weil wir dort bewiesen haben: ist die Bedingung (2) (d. h. (3.2)) nicht erfüllt, so gibt es ein System vom H-Typ $\{\chi_n(x)\}$, für welche die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ nicht fast überall $|C, \alpha|$-summierbar mit $\alpha > \frac{1}{2}$ ist.

Daraus ergibt sich leicht die Notwendigkeit der Bedingung (3.2) auch für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$. Ist nämlich die Reihe (1) für alle Systeme vom H-Typ fast überall $|C, \alpha|$-summierbar mit $0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$, so ist sie nach dem Hilfssatz III auch $|C, \alpha+\beta|$-summierbar mit $\alpha+\beta > \frac{1}{2}$, woraus $\sum_{m=0}^{\infty} A_m < \infty$ folgt, d. h. die Bedingung (3.2) ist auch für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$ notwendig.

Damit ist der Satz V in allen Teilen bewiesen.

§ 4. Bemerkung zu den notwendigen Bedingungen

In diesem Paragraphen wird bewiesen, daß die Bedingung (3) keine notwendige Bedingung der $|C, \alpha|$-Summierbarkeit mit $0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$ ist. Es gilt nämlich der folgende

Satz VI. *Es sei $\{\lambda_m\}$ $(m = 0, 1, \ldots)$ eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge und α eine reelle Zahl mit $0 \leqq \alpha$. Dann gibt es eine nichtnegative Koeffizientenfolge $\{d_n\}$ derart, daß*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m D_m = \infty \qquad \left(D_m = \left\{ \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} d_n^2 \right\}^{1/2} \right)$$

gilt, die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \varphi_n(x)$$

aber trotzdem für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall $|C, \alpha|$-summierbar ist.

Beweis des Satzes VI. Eine Indexfolge $(1 \leqq) n_0 < n_1 < \ldots < n_s < \ldots$ kann angegeben werden, derart, daß

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n_s}} < \infty$$

gilt. Dann definieren wir mittels des Zahlenfolge $\{\lambda_{n_s}\}$ die Koeffizientenfolge $\{d_\nu\}$ $(\nu=0,1,\ldots)$ folgenderweise:

$$d_\nu=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_{n_s}} & \text{für} \quad \nu=2^{n_s}+1,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Aus der Definition ist es klar, daß

$$\sum_{m=0}^{\infty} D_m=\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu<\infty$$

und

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m D_m=\sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{n_s} \frac{1}{\lambda_{n_s}}=\infty$$

erfüllt sind. Daraus folgt durch Anwendung von (1. 1) und (1.2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x)|\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left|\sum_{\nu=0}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} d_\nu \varphi_\nu(x)+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}} d_{n+1}\varphi_{n+1}(x)\right| dx \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} d_\nu \int_0^1 |\varphi_\nu(x)|\,dx+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{A_n^{(\alpha)}} \int_0^1 |\varphi_n(x)|\,dx \leqq$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} L_{n,\nu}^{(\alpha)}+O(1) \leqq O(1) \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu+O(1)<\infty$$

für jedes Orthonormalsystem $\{\varphi_n(x)\}$. Aus dem Satz von B. LEVI ergibt sich dann, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \varphi_\nu(x)$$

für jedes Orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ im Intervall (0, 1) fast überall $|C,\alpha|$-summierbar ist.

Damit haben wir den Satz VI. bewiesen.

B e m e r k u n g. Nach dem bekannten Satz von MENCHOFF und RADEMACHER ist die Bedingung $\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n<\infty$ hinreichend dafür, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergiert. KACZMARZ und MENCHOFF haben ferner bewiesen, daß die Bedingung $\sum_{n=4}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2<\infty$ hinreichend dafür ist, daß die obige Reihe für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall $(C, 1)$-summierbar sei. Sie haben auch gezeigt, daß diese Bedingungen im allgemeinen nicht geschwächt werden kann.

Wir beweisen nun, daß im allgemeinen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 l_n < \infty$ mit keiner positiven, monoton nichtabnehmenden, ins Unendliche strebenen Zahlenfolge $\{l_n\}$ für die (C, α)-Summierbarkeit jeder Reihe (1) mit beliebigem $\alpha \geqq 0$ notwendig sein kann. Es gilt nämlich die folgende Behauptung:

Es sei $\{l_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge. Dann gibt es eine nichtnegative Koeffizientenfolge $\{a_n^*\}$ derart, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{*2} l_n = \infty$$

gilt, die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \varphi_n(x)$$

aber trotzdem für jedes orthonormierte Funktionensystem fast überall absolut konvergent ist.

Beweis. Es sei $\{l_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge. Dann kann eine Indexfolge $k_0 < k_1 < \ldots < k_s < \ldots$ angegeben werden derart, daß

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{l_{k_s}}} < \infty$$

gilt. Wir definieren mittels der Zahlenfolge $\{l_{k_s}\}$ die Koeffizientenfolge $\{a_n^*\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ folgenderweise:

$$a_n^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{l_{k_s}}} & \text{für} \quad n = k_s, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus der Definition ist es klar, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* < \infty \tag{4.1}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{*2} l_n = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{l_{k_s}} l_{k_s} = \infty$$

ist. Daraus folgt nach (4.1) mit Anwendung der Schwarzschen Ungleichung, daß für jedes Orthonormalsystem $\{\varphi_n(x)\}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \int_0^1 |\varphi_n(x)|\,dx \leqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \left(\int_0^1 \varphi_n^2(x)\,dx \right)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* < \infty$$

ist. Somit ergibt sich durch Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* |\varphi_n(x)|$$

im Intervall (0, 1) fast überall konvergiert, wie behauptet.

Schriftenverzeichnis

[1] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. I (New York, 1950).
[2] E. Kogbetliantz, Sur les séries absolument sommables par la méthode des moyennes arithmétiques, *Bulletin des Sciences Math.*, **49** (1925), 234—256.
[3] L. Leindler, Über die orthogonalen Polynomsysteme, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 19—46.
[4] K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen. IX (Absolute Summation), *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 292—299.
[5] A. Zygmund, *Trigonometric series* (Cambridge, 1959).

(Eingegangen am 1. Juli 1960)